Statisztika
Megoldások

1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:
166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)

Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
(1) minden diák tanul legalább két nyelvet.
(2) Az angol is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
(3) Angolul 27-en tanulnak.
(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)

Megoldás:

a) A lányok testmagasságának átlaga: $\frac{2624}{16} = \mathbf{164\ cm}$. (1 pont)

Az osztály tanulóinak átlagmagasságát (t) a 16 lány átlagmagassága (l) és a 14 fiú átlagmagassága (f) segítségével számolhatjuk ki: $t = \frac{16 \cdot l + 14 \cdot f}{30} =$
(1 pont)

$= \frac{16 \cdot 164 + 14 \cdot 172{,}5}{30} =$ (1 pont)

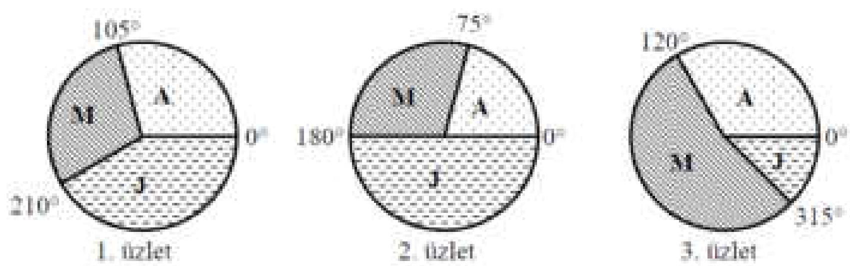
$= \frac{5039}{30}$ (1 pont)

Az osztály tanulóinak átlagmagassága **168,0 cm.** (1 pont)

b) *Lásd: Halmazok 1. feladat*

Összesen: 12 pont

2) Egy könyvkiadó minden negyedévben összesíti, hogy három üzletében melyik szépirodalmi kiadványból fogyott a legtöbb. A legutóbbi összesítéskor mindhárom üzletben ugyanaz a három szerző volt a legnépszerűbb: Arany János, Márai Sándor és József Attila. Az alábbi kördiagramok szemléltetik, hogy az üzletekben milyen arányban adták el ezeknek a szerzőknek a műveit. A kördiagramok az első üzletből 408, a másodikból 432, a harmadikból 216 eladott könyv eloszlását szemléltetik.



a) A kördiagramok adatai alapján töltse ki az alábbi táblázatot! Melyik szerző műveiből adták el a vizsgált időszakban a legtöbb könyvet?
(5 pont)

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János				
Márai Sándor				
József Attila				
Összesen	**408**	**432**	**216**	

b) Készítsen olyan oszlopdiagramot a táblázat alapján, amely a vizsgált időszakban a szerzők szerinti összesített forgalmat szemlélteti!

(3 pont)

A könyvkiadó a három üzletében minden eladott könyvhöz ad egy sorsjegyet. Ezek a sorsjegyek egy közös sorsoláson vesznek részt negyedévenként. A vizsgált időszakban azok a sorsjegyek vesznek részt a sorsoláson, amelyeket a fenti három szerző műveinek vásárlói kaptak. Két darab 50 ezer forintos könyvutalványt sorsolnak ki köztük.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időszak sorsolásán mind a két nyertes sorsjegyet Márai Sándor egy-egy könyvéhez adták, és mind a két könyvet a 2. üzletben vásárolták? Válaszát három tizedesjegy pontossággal adja meg! (5 pont)

Megoldás:

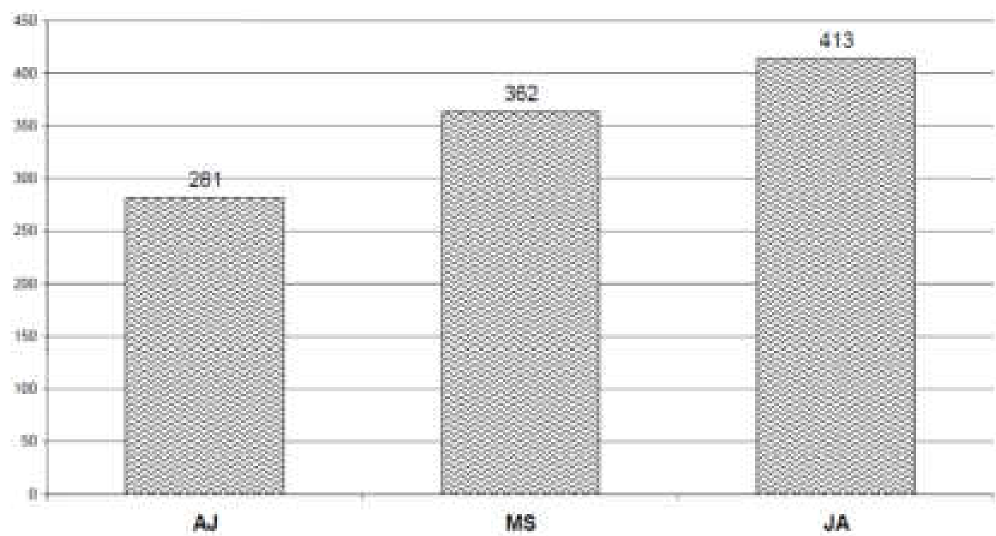
a) A kördiagramok alapján:

	1. üzlet	2. üzlet	3. üzlet	Összesített forgalom
Arany János	**119**	**90**	**72**	**281**
Márai Sándor	**119**	**127**	**117**	**362**
József Attila	**170**	**216**	**27**	**413**
Összesen	408	432	216	**1056**

helyes oszloponként 1-1 pont (4 pont)

A legtöbb példányt József Attila műveiből adták el. (1 pont)

b) Eladott könyvek:



Jó adatokat tüntet fel. (1 pont)

Arányos a diagram. Célszerűen választ egységet. (1 pont)

Rendezett az ábra. (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 53. feladat*

Összesen: 13 pont

3) Egy felmérés során megkérdeztek 640 családot a családban élő gyermekek számáról, illetve azok neméről. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja:

(Tehát pl. a gyermektelen családoknak a száma 160, és 15 olyan család volt a megkérdezettek közt, amelyben 1 fiú és 2 lány van.)

		fiúk száma					
		0	1	2	3	4	5
lányok száma	0	160	103	61	8	5	0
	1	121	58	11	4	1	1
	2	54	15	3	2	2	2
	3	0	3	1	1	0	1
	4	6	3	1	1	1	0
	5	1	0	1	0	0	0

a) Hány fiúgyermek van összesen a megkérdezettek családokban? (3 pont)

b) A felmérésben szereplő legalább kétgyermekes családokban mennyi a leggyakoribb leányszám? (5 pont)

c) A családsegítő szolgálat a megkérdezett családok közül a legalább négy gyermeket nevelőket külön támogatja. Az alábbi táblázat kitöltésével készítsen gyakorisági táblázatot a külön támogatásban részesülő családokban lévő gyermekek számáról!

gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság							

Hány családot és összesen hány gyermeket támogat a családsegítő szolgálat? (6 pont)

Megoldás:

a) A fiúk számát az oszlopokban lévő adatok alapján számoljuk ki (1 pont)

$(103+58+15+3+3+0)+2\cdot(61+11+3+3\cdot 1)+3\cdot 16+4\cdot 9+5\cdot 4=$ (1 pont)

$=$ **442** fiú van összesen a megkérdezett családokban (1 pont)

b) A lányok számát a táblázatból soronként számolhatjuk ki, de a gyermektelen és egygyermekes családok adatait (160, illetve 103 és 121) nem vesszük figyelembe. Nincs lány $61+8+5=74$ családban (1 pont)

1 lány van $58+11+4+1+1=75$ családban (1 pont)

2 lány van $54+15+3+2+2+2=78$ családban (1 pont)

3 lány van $9+3+1+1+1=14$ családban

4 lány van $6+3+1+1+1=12$ családban (1 pont)

5 lány van $1+1=2$ családban

A legalább kétgyermekes családokban a leggyakoribb leányszám a **2** (1 pont)

c)

gyermekszám egy családban	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	21	8	5	4	2	0	0

A gyakoriság helyes értelmezése (1 pont)

A táblázatban van legalább 4 helyes gyakoriság (1 pont)

Minden gyakoriság helyes (1 pont)

A támogatott családok száma **40** (1 pont)

A támogatott gyermekek száma: $21\cdot 4+8\cdot 5+5\cdot 6+4\cdot 7+2\cdot 8=$ (1 pont)

$=$ **198** (1 pont)

Összesen: 14 pont

4) Az ENSZ 1996-ban megjelent táblázatának egy részlete a nyolc legnagyobb népességszámú ország népességi adatait tartalmazza 1988-ban és egy népességdinamikai előrejelzés szerint 2050-ben.

	1988		2050 (előrejelzés)	
Sorrend	Ország	Népességszám (millió fő)	Ország	Népességszám (millió fő)
1	Kína	1255	India	1533
2	India	976	Kína	1517
3	Egyesült Államok	274	Pakisztán	357
4	Indonézia	207	Egyesült Államok	348
5	Brazília	165	Nigéria	339
6	Oroszország	148	Indonézia	318
7	Pakisztán	147	Brazília	243
8	Japán	126	Banglades	218

(World Population Prospects: The 1996 Revision)

Feltételezzük, hogy Pakisztán lakossága 1988 és 2050 között minden évben ugyanannyi százalékkal nő, mint amennyivel az előző évben növekedett.

a) Ezzel a feltételezéssel élve –millió főre kerekítve- hány lakosa lesz Pakisztánnak 2020-ban? (Az évi százalékos növekedés két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon!) (7 pont)

b) A tábláztat mindkét oszlopában szereplő országok népességi adataira vonatkozóan mennyivel változik az átlagos lakosságszám és a medián 1988 és 2050 között? (Válaszát millió főben, két tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (5 pont)

Megoldás:

a) Pakisztán lakosságszáma az előrejelzés alapján 147 millióról 357 millióra nő 62 év alatt. (1 pont)

Így ha az évi növekedés p százalékos, akkor $357 = 147 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{62}$. (1 pont)

ahonnan $p = 100 \cdot \left(\sqrt[62]{\frac{357}{147}} - 1\right)$. (1 pont)

Kiszámolva a kért kerekítéssel $p \approx 1,44\%$. (1 pont)

A vizsgált növekedési időszak 32 év, (1 pont)

így a feltételezés és előrejelzés alapján 2020-ban Pakisztán lakossága $147 \cdot 1,0144^{32} \approx$ (1 pont)

$\approx$ **232 (millió fő).** (1 pont)

b) Hat ország szerepel minden oszlopban: Kína, India, Egyesült Államok, Indonézia, Pakisztán, Brazília (1 pont)

Erre a hat országra nézve a népesség átlaga (millió főben) 1988-ban: $\frac{1255 + 976 + 274 + 207 + 165 + 147}{6} = 504$

és 2050-ben: $\frac{1533 + 1517 + 357 + 348 + 318 + 243}{6} \approx 719,33$ (1 pont)

Az átlagos népességszám közelítőleg **215,33 (millió fő)-vel nő**. (1 pont)

Mivel a minta 6 elemű, ezért a medián a rendezett adatsokaság két középső elemének számtani átlaga. Így a medián 1988-ban $\frac{274 + 207}{2} = 240,5$, 2050-ben pedig $\frac{357 + 348}{2} = 352,5$ (1 pont)

A medián is nő, 112 (millió fő)-vel (1 pont)

Összesen: 12 pont

5) Az alábbi táblázat egy ország munkaképes lakosságának foglalkoztatottság szerinti megoszlását mutatja. Az adatok ezer főre kerekítettek.

	Ágazatok	**2003. év**	**2004. év**
Foglalkoztatottak	**Mezőgazdaságban dolgozó**	**1020**	
	Iparban dolgozó	**1870**	**1936**
	Szolgáltatásban dolgozó	**5015**	
Munkanélküli		**595**	
Munkaképes lakosság összesen		**8500**	

2004-ben

- **az ország munkaképes lakosságának száma 3 ezrelékkel nőtt 2003-hoz képest**
- **a munkanélküliek aránya a munkaképes lakosságban változatlan maradt**
- **a szolgáltatásban dolgozók száma a 2003-ban ott dolgozók számának 2%-ával megnőtt.**

a) Számítsa ki a táblázat hiányzó adatait (ezer főre kerekítve)! (7 pont)

b) Ábrázolja kördiagramon a foglalkoztatottak ágazatok szerinti megoszlását 2003-ban! (5 pont)

c) Hány százalékkal változott a mezőgazdaságban dolgozók száma 2004-re a 2003-as állapothoz képest? Nőtt vagy csökkent? (4 pont)

Megoldás:

a) A munkaképes lakosság száma $8500 \cdot 1{,}003 \approx$ **8526 ezer fő** (2 pont)

A munkanélküliek aránya változatlan, ezért a számuk $8526 \cdot \frac{595}{8500} \approx$ **597 ezer fő** (2 pont)

A szolgáltatásban dolgozók száma $5015 \cdot 1{,}02 =$ **5115 ezer fő** (2 pont)

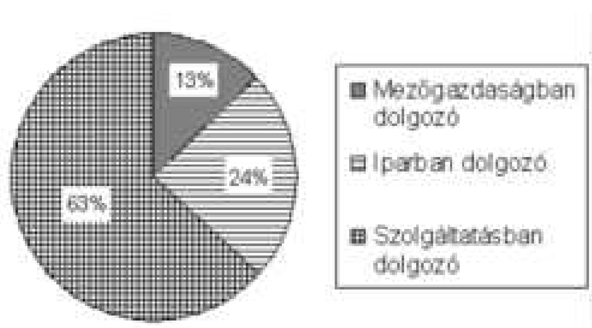
A mezőgazdaságban dolgozók száma $8526 - 597 - 1936 - 5115 =$ **878 ezer fő** (1 pont)

b) 2003-ban a foglalkoztatottak száma 7905 ezer fő volt. (1 pont)

A kördiagramon a mezőgazdaságban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge az aránynak megfelelően: $\frac{1020}{7905} \cdot 360° \approx 46°$ (1 pont)

Az iparban dolgozókat szemléltető körcikk középponti szöge $\frac{1870}{7905} \cdot 360° \approx 85°$ (1 pont)

(A szolgáltatásban dolgozók körcikke $\frac{5015}{7905} \cdot 360° \approx 228°$)



Helyes ábra. (2 pont)

c) $\frac{878}{1020} \approx 0{,}87$ (2 pont)

A mezőgazdaságban dolgozók száma, körülbelül 14%-kal csökkent. (2 pont)

Összesen: 16 pont

6) A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály tagjainak első félév végi matematika osztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Tanulók száma	**4**	**7**	**9**	**8**	**2**

a) Ábrázolják az eredmények eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)

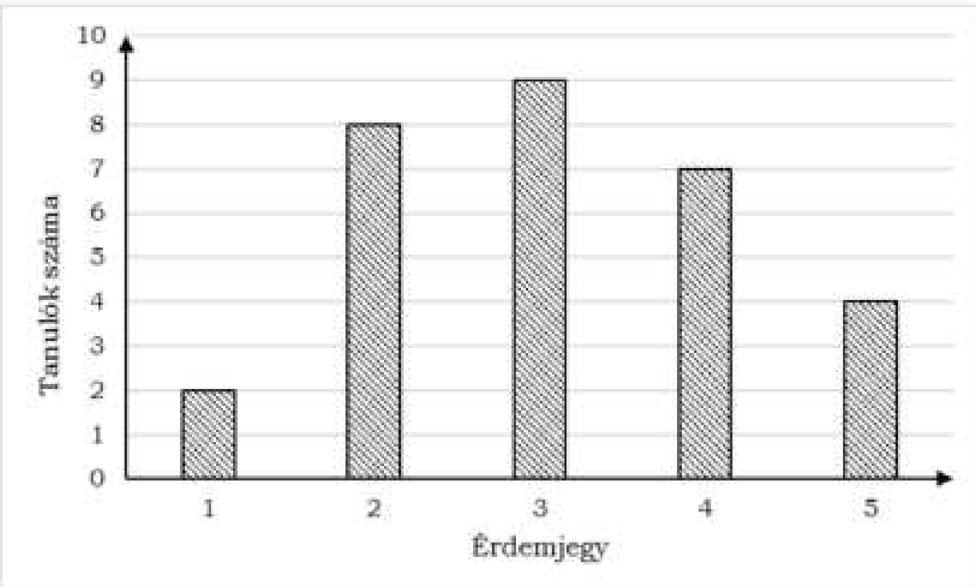
b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)

d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal? (8 pont)

Megoldás:

a)



(3 pont)

b) A jegyek átlaga: $\frac{4\cdot5+7\cdot4+9\cdot3+8\cdot2+2\cdot1}{30}=\mathbf{3{,}1}$ (2 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 18. feladat*

d) *Lásd: Valószínűségszámítás 18. feladat*

Összesen: 16 pont

7)

a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.)
Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)

c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm.
Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Halmazok 6. feladat*

b) *Lásd: Gráfelmélet 8. feladat*

c) A második kiránduláson 21 tanuló volt. (1 pont)
Jelölje a kiránduláson résztvevők átlagmagasságát h. Így a feltételek alapján:
$174{,}3=\dfrac{21\cdot h+9\cdot 182}{30}$, (3 pont)
ahonnan $h=\mathbf{171}$ **cm.** (2 pont)

Összesen: 16 pont

8) Egy 50 adatból álló adatsokaság minden adata eleme a $\{0;\ 1;\ 2\}$ halmaznak.

a) Legfeljebb hány 2-es lehet az adatsokaságban, ha az adatok átlaga 0,32? (4 pont)

b) Lehet-e az 50 adat mediánja 0, ha az átlaguk 1,04? (7 pont)

c) Lehet-e az 50 adat egyetlen módusza az 1, ha az átlaguk 0,62? (3 pont)

Megoldás:

a) Ha az 50 adat átlaga 0,32, akkor összegük $(50\cdot 0{,}32=)16$. (2 pont)

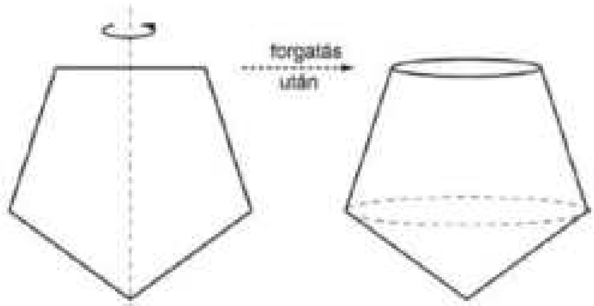
Mivel az adatsokaság minden adata nemnegatív, **legfeljebb 8 darab** 2-es lehet az 50 adat között. (8 darab 2-es és 42 darab 0 esetén valóban 0,32 az átlag) (2 pont)

b) Indirekt módon tegyük fel, hogy a medián lehet 0, (1 pont)
azaz a nemcsökkenő sorozatba rendezett sokaságban a 25. és 26. szám (és így az első 24 szám is) 0. (1 pont)
Ekkor összesen legfeljebb 24 szám lehet 1-es vagy 2-es. (1 pont)
Az 50 szám összege tehát legfeljebb 48 lehet, (1 pont)
az elérhető legnagyobb átlag pedig 0,96. (1 pont)
Mivel a számok összege így max 48 lehetne - ellentmondásra jutottunk,(1 pont)
azaz **nem lehet** a medián 0. (1 pont)

c) Például 31 darab 1-es és 19 darab 0 esetén 0,62 az átlag, valamint 1 a módusz, (2 pont)
tehát **lehet** az 50 adat módusza 1. (1 pont)

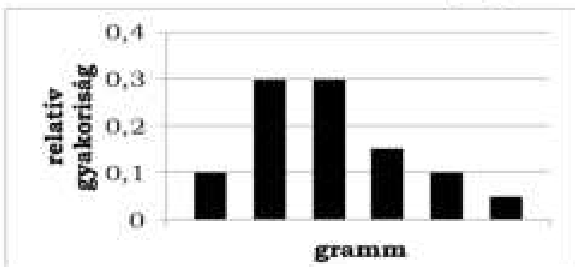
Összesen: 14 pont

9) Egy cég a függőleges irány kijelölésére alkalmas, az építkezéseknél is gyakran használt „függőónt” gyárt, amelynek nehezéke egy acélból készült test. Ez a test egy 2 cm oldalhosszúságú szabályos ötszög egyik szimmetriatengelye körüli forgatásával származtatható (lásd az ábrán).



a) Hány cm³ a nehezék térfogata? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (9 pont)

A minőség-ellenőrzés 120 darab terméket vizsgált meg. Feljegyezték az egyes darabok egész grammokra kerekített tömegét is. Hatféle tömeg fordult elő, ezek relatív gyakoriságát mutatja az oszlopdiagram.



b) Készítsen gyakorisági táblázatot a 120 adatról, és számítsa ki ezek átlagát és szórását! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 20. feladat*

b) A gyakorisági táblázat: (1 pont)

tömeg (gramm)	105	106	107	108	109	110
gyakoriság	12	36	36	18	12	6

A 120 adat

átlaga: $\frac{12\cdot 105+...+6\cdot 110}{120}=\mathbf{107}$ **(gramm)**. (2 pont)

szórása: $\sqrt{\frac{12\cdot(105-107)^2+...+6\cdot(110-107)^2}{120}}=\sqrt{1,7}\approx\mathbf{1,3}$ **(gramm)**. (2 pont)

Összesen: 14 pont

10) Egy kisvárosban hét nagyobb üzlet található. A tavalyi évben elért, millió forintra kerekített árbevételeikről tudjuk, hogy az átlaguk 120 millió Ft, és ez megegyezik a mediánjukkal. A hét adat egyetlen módusza 100 millió Ft. Két üzletben éppen átlagos, azaz 120 millió forintos a kerekített bevétel, a legnagyobb bevétel pedig 160 millió forint volt.

a) Számítsa ki a kerekített bevételek szórását! (6 pont)

A városban az egyik ruhakereskedéssel foglalkozó kisvállalkozás 80%-os haszonkulccsal dolgozik. Ez azt jelenti, hogy például egy 10000 Ft-os beszerzési értékű terméket 18000 Ft-ért árulnak az üzletükben. Amikor akciós időszak van, akkor a „rendes" eladási árból 50%-os árengedményt adnak minden eladott termékre.

b) Mekkora volt az eladásból származó árbevételnek és az eladott áru beszerzési értékének a különbsége a tavalyi évben, ha összesen 54 millió Ft volt az éves árbevétel, és ebből 9 millió Ft-ot az akciós időszakban értek el? (4 pont)

A kisvállalkozás üzletében az egyik fajta férfizakóból négyféle méretet árusítanak (S, M, L, XL). Nyitáskor egy rögzített állvány egyenes rúdjára mindegyik méretből 4-4 darabot helyeztek el (minden zakót külön vállfára akasztva, egymás mellett). A nap folyamán ezek közül megvettek 4 darab S-es, 3 darab M-es, és 2 darab L-es méretűt, a megmaradt zakók pedig összekeveredtek.

c) Az üzlet zárásakor hányféle sorrendben lehetnek (balról jobbra nézve) a rúdra akasztva a megmaradt zakók, ha az azonos méretű zakókat nem különböztetjük meg egymástól? (3 pont)

Megoldás:

a) A kerekített bevételek összege $7\cdot 120=840$ (millió Ft). (1 pont)

A medián 120 millió forint, és két 120 millió forintos árbevétel volt, ezért legfeljebb három 120 millió forintnál kisebb bevétel lehet. (1 pont)

Mivel a módusz 100 millió forint, ezért három 100 millió forintos árbevétel volt. (1 pont)

A 160 millió Ft-os árbevétel figyelembevételével a hetedik árbevétel $(840-3\cdot 100-2\cdot 120-160=)140$ millió forintnak adódik. (1 pont)

A (kerekített) bevételek szórása:

$$\sqrt{\frac{3\cdot(100-120)^2+2\cdot(120-120)^2+(140-120)^2+(160-120)^2}{7}}\approx$$ (1 pont)

$\approx$ **21,4 millió (Ft).** (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 14. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 33. feladat*

Összesen: 13 pont

11) Egy automatának 100 gramm tömegű hasábokat kell két egyenlő tömegű részre szétvágnia. A két darab közül az egy az *A* futószalagra kerül, a másik a *B* futószalagra. Az utolsó négy darabolásnál az automata hibája miatt az *A* futószalagra került darabok tömege 51 g, 52 g, 47 g, 46 g.

a) Igazolja, hogy a két futószalagra került 4-4 darab tömegének átlaga különbözik, a szórása pedig megegyezik! (5 pont)

Egy háromoldalú egyenes hasáb alapéleinek hossza: $AB=4$, $AC=BC=\sqrt{13}$, a hasáb magassága $2\sqrt{3}$ hosszúságú. Az *AB* alapél egyenesére illeszkedő *S* sík $30°$-os szöget zár be a hasáb alaplapjával, és két részre vágja a hasábot.

b) Számítsa ki a két rész térfogatának arányát! (11 pont)

Megoldás:

a) A *B* futószalagra került darabok tömege 49 g, 48 g, 53 g és 54 g. (1 pont)

(Az *A* futószalagra került darabok tömege csökkenő sorrendben 52 g, 51 g, 47 g és 46 g, a *B* futószalagra került darabok tömege pedig 54 g, 53 g, 49 g, 48 g, tehát) a *B* futószalagra került darabok tömege rendre 2 grammal nagyobb, mint a megfelelő, *A* futószalagra került darabé. (1 pont)

Ha egy adatsokaság minden adatához *c*-t hozzáadunk, akkor a sokaság átlaga *c*-vel változik, a szórása pedig változatlan marad. (2 pont)

Tehát a két futószalagra került **darabok tömegének átlaga különböző** (a különbség $c=2$ gramm), **szórása pedig egyenlő.** (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 26. feladat*

Összesen: 16 pont

12) Egy városi piacon a piros almát 5 kg-os csomagolásban árulják. A csomagokon olvasható felirat szerint egy-egy csomag tömege „5 kg ±10 dkg”. (Az almák nagy mérete miatt az 5 kg pontosan nem mérhető ki.) A minőségellenőrzés során véletlenszerűen kiválasztanak nyolc csomagot, és ezek tömegét méréssel ellenőrzik. Csak akkor engedélyezik az almák árusítását, ha egyik csomag tömege sem kevesebb 4 kg 90 dkg-nál, és a nyolc mérési adat 5 kg-tól mért átlagos abszolút eltérése nem haladja meg a 10 dkg-ot. A mérések eredménye a következő:

mérés sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
mért tömeg (dkg)	506	491	493	512	508	517	493	512

a) A mérési eredmények alapján engedélyezik-e az almák árusítását? (4 pont)

b) Határozza meg a nyolc mérési eredmény átlagát és szórását! (3 pont)

A piac egyik eladójához friss eper érkezett. Az eladó eredetileg azt tervezte, hogy az I. osztályú epret 800 Ft/kg, a II. osztályút 650 Ft/kg, a III. osztályút pedig 450 Ft/kg egységáron értékesíti. A piacon azonban túlkínálat volt eperből, ezért úgy döntött, hogy az összes epret egy

kupacba önti össze, és akciós egységáron árulja. Az akciós eladási egységár kialakításakor úgy számolt, hogy ha az összes epret ezen az egységáron adja el, akkor a bevétele (körülbelül) 15%-kal lesz csak kevesebb, mint azt eredetileg tervezte.

c) Mennyi legyen az akciós egységár, ha az összeöntött eper 35%-a I. osztályú, $\frac{3}{8}$ része II. osztályú, a többi 33 kg pedig III. osztályú volt eredetileg? Válaszát egész értékre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) A mért tömegek között nincs 490 dkg-nál kisebb, tehát az első feltétel teljesül. (1pont)

Az 5 kg-tól való eltérések (dkg-ban) rendre 6, 9, 7, 12, 8, 17, 7, 12. (1pont)

Az eltérések átlaga $\left(\frac{78}{8}=\right)$ 9,75 (dkg). (1pont)

Az árusítást engedélyezik. (1pont)

b) A mért adatok átlaga $\left(\frac{4032}{8}=\right)$ **504** (dkg), (1pont)

szórása $\sqrt{\frac{2\cdot 13^2+2\cdot 11^2+2\cdot 8^2+4^2+2^2}{8}}=\sqrt{\mathbf{91}}\approx \mathbf{9{,}54}$ (2pont)

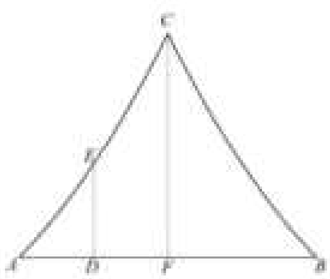
c) *Lásd: Szöveges feladatok 16. feladat*

Összesen: 14 pont

13) Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság? (5 pont)

Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el. A homlokzat szélessége $AB=8$ méter, magassága $FC=6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE=2{,}5$ méter.



b) Hány négyzetméter a homlokzat területe? (11 pont)

Megoldás:

a) A társaság eredetileg x fős volt, a 9 fő csatlakozása után $x+9$ fős lett. A feladat szövege szerint: $0{,}25x+5=0{,}36(x+9)$. (2 pont)

$0{,}11x=1{,}76\Rightarrow x=16$ (1 pont)

Ellenőrzés: A 16 fős társaságban 4 nő volt, a 25 fős társaságban pedig 9 nő, és a 9 valóban 36%-a a 25-nek. (1 pont)

Tehát a társaság eredetileg **16 fős** volt. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 33. feladat*

Összesen: 16 pont

14) Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több.

a) Határozza meg a vonatok átlagsebességét! (7 pont)

Az egyik hét munkanapjain utasszámlálást végeztek a személyvonaton. Hétfőn 200, kedden 160, szerdán 90, csütörtökön 150 utast jegyeztek fel.

b) Hány utas volt pénteken, ha tudjuk, hogy az öt adat átlaga is szerepel az adatok között, továbbá az adatok (egyetlen) módusza nem egyenlő a mediánjukkal? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha (km/h-ban mérve) a személyvonat átlagsebessége υ, akkor a gyorsvonat átlagsebessége $\upsilon+18\,(\upsilon>0)$. A személyvonat menetideje (órában mérve) $\frac{195}{\upsilon}$, a gyorsvonat menetideje $\frac{195}{\upsilon+18}$. (1 pont)

A feladat szövege szerint: $\frac{195}{\upsilon}=\frac{195}{\upsilon+18}+0,75$. (1 pont)

$195\upsilon+3510=195\upsilon+0,75\upsilon^2+13,5\upsilon$ (1 pont)

$0,75\upsilon^2+13,5\upsilon-3510=0$ (1 pont)

$\upsilon=60$ (vagy $\upsilon=78$, de) a negatív gyök nem megoldása a feladatnak. (1 pont)

A személyvonat átlagsebessége **60 km/h**, a gyorsvonat átlagsebessége $(60+18=)$**78 km/h**. (1 pont)

Ellenőrzés: A gyorsvonat menetideje $(195:78=)2,5$ óra, a személyvonat menetideje $(195:60=)3,25$ óra. Ez valóban 45 perccel több, mint 2,5 óra. (1 pont)

b) Mivel az 5 adatnak egyetlen módusza van, ezért az ötödik adat csak a négy ismert adat valamelyike lehet (90, 150, 160 vagy 200). (1 pont)

Az ötödik adat nem lehet 150 vagy 160, mert akkor a módusz és a medián megegyezne. (1 pont)

Az ötödik adat nem lehet a 90 sem, mert akkor az átlag $(690:5=138)$ nem szerepelne az adatok között. (1 pont)

Ha az ötödik adat (a pénteki utasok száma) a 200, akkor az öt adat átlaga $(800:5=)160$, (1 pont)

ami minden feltételnek megfelel: a módusz 200, a medián pedig 160 (ami egyben az öt adat átlaga is). Pénteken tehát **200** utast számláltak. (1 pont)

Összesen: 12 pont

15) A tavaszi idény utolsó bajnoki mérkőzésén a Magas Fiúk Kosárlabda Klubjának (MAFKK) teljes csapatából heten léptek pályára. A mérkőzés után az edző elkészítette a hét játékos egyéni statisztikáját. Az alábbi táblázat mutatja a játékosok dobási kísérleteinek számát és az egyes játékosok dobószázalékát egészre kerekítve. (A dobószázalék megmutatja, hogy a dobási kísérleteknek hány százaléka volt sikeres.)

Játékos mezszáma	Dobási kísérletek száma	Dobószázalék
4	2	50
5	3	0
6	10	60
7	8	25
10	7	43

13	6	33
15	14	57

a) Számítsa ki, hogy mennyi volt a csapat dobószázaléka ezen a mérkőzésen! (5 pont)

Az őszi idény kezdete előtt egy hónappal a MAFKK csapatához csatlakozott egy 195 cm magas játékos, így a csapattagok magasságának átlaga a korábbi átlagnál 0,5 cm-rel nagyobb lett. Pár nap múlva egy 202 cm magas játékos is a csapat tagja lett, emiatt a csapattagok magasságának átlaga újabb 1 cm-rel nőtt.

b) Hány tagja volt a MAFKK-nak, és mekkora volt a játékosok magasságának átlaga a két új játékos csatlakozása előtt? (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 13. feladat*

b) A két új játékos csatlakozása előtt a csapat tagjainak száma x a tagok magasságának átlaga pedig y cm volt $(x \in \mathbb{N}, y > 0)$. (1 pont)

(Az első játékos belépése előtt a csapattagok magasságának összege xy volt, az új játékos után $xy + 195$ lett, tehát) $\frac{xy+195}{x+1} = y + 0,5$. (2 pont)

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a második új játékos belépését követően $\frac{xy+195+202}{x+2} = y + 1,5$. (2 pont)

Az egyenletek rendezése után a

$\left.\begin{aligned} 0,5x + y &= 194,5 \\ 1,5x + 2y &= 394 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerhez jutunk. (2 pont)

$x = 10$ és $y = 189,5$. (2 pont)

A csapat tagjainak száma 10, az átlagos magasságuk pedig 189,5 cm volt. (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot! (7 pont)

A 72-nek és az *n* pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27720.

b) Határozza meg az *n* lehetséges értékeinek számát, és adja meg az *n* legkisebb lehetséges értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az adatok száma páratlan, ezért a medián (72) szerepel az adatok között. (1 pont)

A hét adat között a 71 és a 75 pontosan kétszer szerepel (egynél többször kell előfordulniuk, de ha háromszor szerepelnének, akkor a terjedelem 4 lenne). Még két adatot kell tehát meghatározni. (1 pont)

A hét adat összege $(7 \cdot 73 =)511$,

a hiányzó két adat összege így $(511 - 364 =)147$. (1 pont)

A hiányzó adatok egyike sem lehet a 72, mert akkor nem teljesülne a móduszokra vonatkozó feltétel, és nem lehet mindkettő 72-nél nagyobb sem, mert akkor a 72 nem lenne medián. (1 pont)

Tehát a hiányzó adatok közül az egyik legfeljebb 70 lehet, a másik pedig ekkor a terjedelem miatt legfeljebb 77 lehet. (1 pont)

(Mivel $70+77=147$, ezért) csak a 70 és a 77 lehetséges. (1 pont)

A hét szám: **70, 71, 71, 72, 75, 75, 77**. (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 10. feladat*

Összesen: 13 pont

17) Kinga a következő tanítási napra hat házi feladatot kapott, három kötelezőt és három szorgalmit. Egy-egy kötelező házi feladatot kapott matematikából, angolból és magyarból, ezeket biztosan elkészíti. Szorgalmi házi feladatot biológiából, németből és történelemből kapott, ezeket nem feltétlenül csinálja meg: lehet, hogy mind a hármat elkészíti, lehet, hogy csak kettőt vagy egyet, de az is lehet, hogy egyet sem készít el.

a) Összesen hányféle különböző sorrendben készítheti el Kinga a házi feladatait? (Két esetet különbözőnek tekintünk, ha vagy nem ugyanazokat a házi feladatokat, vagy ugyanazokat a házi feladatokat, de más sorrendben oldja meg.) (6 pont)

Kinga matematika-házifeladata ez volt: *„500 különböző pozitív egész szám átlaga 1000. Legfeljebb mekkora lehet a számok közül a legnagyobb?”*

b) Adja meg Kinga matematika-házifeladatának megoldását! (5 pont)

Kinga, Linda, Misi és Nándi elvállalta, hogy az alacsonyabb évfolyamok tanulói közül hét diákot rendszeresen korrepetálni fog. Az egyénenként vállalt tanulók számát egy megbeszélésen döntik el.

c) Hány különböző módon állapodhatnak meg abban, hogy melyikük hány tanulót korrepetáljon, ha mindegyikük vállal legalább egy tanulót? (Két megállapodást különbözőnek tekintünk, ha legalább egyikük nem ugyanannyi tanulót korrepetál a két megállapodás szerint.) (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 42. feladat*

b) A számok összege $1000 \cdot 500 = 500\,000$. (1 pont)

A lehetséges legnagyobb számot akkor kaphatjuk meg, ha a többi 499 szám a lehető legkisebb. (1 pont)

A legkisebb 499 különböző pozitív egész szám összege $1+2+3+...+499=\frac{500 \cdot 499}{2}=124\,750$. (2 pont)

A számok közül a legnagyobb tehát legfeljebb $500000-124750=\mathbf{375250}$ lehet. (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 42. feladat*

Összesen: 16 pont

18) Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm³. A doboz aljának és

tetejének anyagköltsége 0,2 cm^2 Ft, míg oldalának anyagköltsége $0,1\ cm^2/Ft$.

a) Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve! (13 pont)

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (3 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények – Analízis 18. feladat*)

b) Az adatok átlaga 0,7. (1 pont)

A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése:

$\frac{6\cdot 0,7+2\cdot 0,3+1,3+2,3}{10}=\mathbf{0,84}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

19) Két közvélemény-kutató cég mérte fel a felnőttek dohányzási szokásait. Az egyik cég véletlenszerűen választott 800 fős mintában 255 rendszeres dohányost talált, a másik egy hasonlóan véletlenszerűen választott 2000 fős mintában 680-at.

a) Adja meg mindkét mintában a dohányosok relatív gyakoriságát! (4 pont)

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ha a fenti 2000 fős mintából véletlenszerűen kiválasztunk 3 főt, akkor éppen 1 dohányos van közöttük? (7 pont)

c) Tegyük fel, hogy a lakosság 34%-a dohányos. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy az országban 10 találomra kiválasztott felnőtt közül egy sem dohányos! (5 pont)

Megoldás:

a) A dohányosok relatív gyakorisága az első cégnél $\frac{225}{800}\approx\mathbf{0,32}$ (2 pont)

A második cégnél $\frac{680}{2000}=\mathbf{0,34}$ (2 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 3. feladat*

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 3. feladat*

Összesen: 16 pont

20) Egy továbbképzésen részt vevő csoport tagjai életkorának átlaga 28 év. Az öt legidősebb résztvevő életkorának átlaga 40 év, a többieké 25,6 év.

a) Hány nő és hány férfi vesz részt a továbbképzésen, ha 1,5-szer annyi nő van a csoportban, mint férfi? (7 pont)

A csoport tagjai az egyik napon „keleties" ebédet kaptak. Az ételek ízesítéséhez hatféle fűszer állt rendelkezésükre: keserű, savanyú, édes, sós, csípős és fanyar.

b) Hányféleképpen ízesíthetik az ételeiket a részvevők úgy, hogy a hatból három- vagy négyféle fűszert használhatnak, de az édes és a keserű nem szerepelhet egyszerre? (6 pont)

Megoldás:

a) A férfiak száma legyen *f*, ekkor a nők száma 1,5*f*, a képzésen résztvevők száma pedig 2,5*f*. (1 pont)

A csoport tagjai életkorának összege $2{,}5f \cdot 28 = 70f$. (1 pont)

Az öt legidősebb résztvevő nélkül az életkorok összege $70f - 5 \cdot 40 = 70f - 200$ (1 pont)

A feladat szövege szerint $70f - 200 = 25{,}6(2{,}5f - 5)$. (1 pont)

$70f - 200 = 64f - 128$

$f = 12$ (1 pont)

A képzésen **12 férfi** és **18 nő** vett részt. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján:

A csoport tagjai életkorának összege $30 \cdot 28 = 840$.

Az öt legidősebb személy nélkül ez az összeg 640, és $640 : 25 = 25{,}6$ valóban. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Ha a résztvevők létszáma *x*, akkor az életkoruk összege $28x$. (1 pont)

Az öt legidősebb nélkül a csoport tagjai életkorának összege egyrészt $25{,}6(x-5)$, (1 pont)

másrészt $28x - 5 \cdot 40$. (1 pont)

$25{,}6(x-5) = 28x - 5 \cdot 40$ (1 pont)

$x = 30$ (1 pont)

($30 : 2{,}5 = 12$, tehát) **12 férfi** és **18 nő** vett részt a képzésen. (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján:

A csoport tagjai életkorának összege $30 \cdot 28 = 840$.

Az öt legidősebb személy nélkül ez az összeg 640, és $640 : 25 = 25{,}6$ valóban. (1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 44. feladat*

Összesen: 13 pont

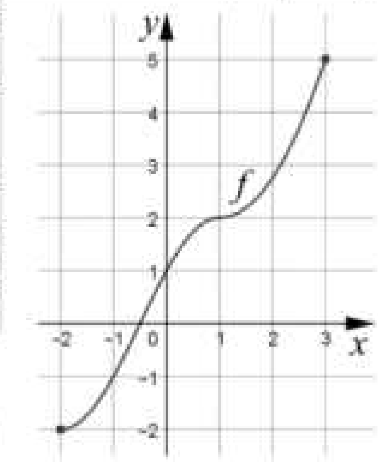
21) Egy nyolcfős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kísérelték meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7.

a) Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását! (4 pont)

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt $45°$-os szögre törekszik a dobás indításánál.

b) Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0;2)$ és a $Q(4,6;3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig $45°$! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg! (8 pont)

Az ábrán a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható.



c) Adja meg az f inverzfüggvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából! (4 pont)

Megoldás:

a) A nyolc szám átlaga $(48:8=)6$. (1 pont)

A nagyság szerint rendezett adatok: $3, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8$, ezért a medián $6,5$. (1 pont)

A szórás: $\sqrt{\frac{(-3)^2+(-2)^2+3\cdot 1^2+2^2}{8}} =$ (1 pont)

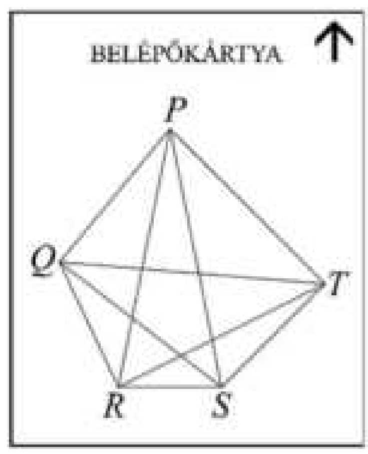
$= \sqrt{\frac{20}{8}} \approx \mathbf{1,58}$. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények – Analízis 48. feladat*

c) *Lásd: Függvények – Analízis 48. feladat*

Összesen: 16 pont

22) Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a *PQRST* konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.)



A konferenciának 400 résztvevője lesz.

a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya? (3 pont)

A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai *A*, *B* és *C*, akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes *CD* kerítés úgy, hogy a *BCD* háromszög alakú rész területe $200\ \text{m}^2$. (*D* az *AB* oldalon van.)

b) Milyen hosszú a *CD* kerítés? (7 pont)

A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.

c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga? (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 48. feladat*

b) *Lásd: Síkgeometria 42. feladat*

c) Ha a magyar résztvevők életkorának átlaga x év, akkor

$$45,7=\frac{200x+70\cdot 44+130\cdot 48}{200+70+130}. \qquad \text{(2 pont)}$$

$$18280=200x+9320$$

$$200x=8960 \qquad \text{(1 pont)}$$

$\boldsymbol{x=44,8}$ **év a magyar résztvevők életkorának átlaga.** (1 pont)

Összesen: 14 pont

23) Tekintsük az (a_n) sorozatot: $a_1=\binom{2}{2}=1$, $a_2=\binom{3}{2}=3$, $a_3=\binom{4}{2}=6$ és így tovább, $a_n=\binom{n+1}{2}$ $(n\in\mathbb{N}^+)$.

a) Számítsa ki az (a_n) sorozat első öt tagjából álló számsokaság átlagát és szórását! (4 pont)

b) A fenti (a_n) sorozatból képezzük a (b_n) sorozatot: $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Mennyi a (b_n) sorozat határértéke? (4 pont)

A (c_n) számtani sorozat differenciája 0,25. A sorozat első n tagjának összege 100, első $2n$ tagjának összege 300 $(n\in\mathbb{N}^+)$.

c) Határozza meg n értékét! (8 pont)

Megoldás:

a) A sorozat első 5 tagja 1, 3, 6, 10, 15; (1 pont)

az átlaguk 7. (1 pont)

A szórás (számológéppel számolva is jár a pont a helyes eredményre):

$$\sqrt{\frac{(1-7)^2+(3-7)^2+(6-7)^2+(10-7)^2+(15-7)^2}{5}}= \qquad \text{(1 pont)}$$

$\left(=\sqrt{\mathbf{25,2}}\right)\approx\mathbf{5,02}$. (1 pont)

b) *Lásd: Sorozatok 35. feladat*

c) *Lásd: Sorozatok 35. feladat*

Összesen: 16 pont